

Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής: Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Σεπτέμβριος 2021

Θέμα Α

A.1 Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Μονάδες 4

A.2 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 στο A . Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 7

A.3 Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 στο σύνολο A ;

Μονάδες 4

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Μία γνήσια μονότονη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο A .
2. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y/y .
3. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε $f(f^{-1}(y)) = y$ για κάθε $y \in f(A)$.

4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχα και

$$f(A) \cap B \neq \emptyset.$$

Τότε ορίζεται πάντα η σύνθεση $g \circ f$.

5. Μία περιττή συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με

- $f(x) = e^{x-5}$
- $g(x) = \ln x + 5$

B.1 Βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g, g \circ f$ και εξετάστε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

B.2 Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 6

B.3 Να ορίσετε την συνάρτηση $(f + g)(x)$ και δείξτε ότι είναι γνήσια αύξουσα.

Μονάδες 6

B.4 Λύστε στο $[0, 1)$ την εξίσωση:

$$(f + g)(e^{x^2}) = (f + g)(1 - x^2).$$

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(e^x) = e^x + x - 1.$$

Γ.1 Δείξτε ότι $f(x) = \ln x + x - 1, x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ.2 Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε το κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 6

Γ.3 Να λύσετε την ανίσωση

$$\ln\left(\frac{3x}{x^2+2}\right) < x^2 - 3x + 2.$$

Μονάδες 6

Γ.4 Δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$,

$$f(e^x) \geq f\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται μία συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in [0, \pi]$,

$$f^3(x) + f(x) = \eta\mu x (2 - \sigma\upsilon\nu^2 x).$$

Δ.1 Δείξτε ότι $f(x) = \eta\mu x, x \in [0, \pi]$.

Μονάδες 7

Δ.2 Αν $g(x) = \ln x, x > 0$ να προσδιορίσετε την συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x)$ και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 7

Δ.3 Δείξτε ότι για κάθε $h(x) \leq 1, x \in [1, e^\pi]$.

Μονάδες 5

Δ.4 Αν $1 \leq \alpha, \beta \leq e^\pi$ και $h(\alpha) + h(\beta) = 2$ βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!