

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

17.04.2021

ΘΕΜΑ 1

A) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

(Μονάδες 7)

B) Να διατυπώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης $x = x_0$ συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

Γ) «Αν συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R} τότε $f''(x)$ είναι θετική».

α. Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση με A αν είναι αληθής ή Ψ αν είναι ψευδής.

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 1+3)

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο

σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- I) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι το μέγιστο της f .
- II) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού $n \geq 2$ δεν έχουν ασύμπτωτες.
- III) Τα κρίσιμα σημεία συνάρτησης f σε διάστημα Δ είναι πιθανές θέσεις ακροτάτων της f σε αυτό.
- IV) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- V) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα, του οποίου η θέση του στον άξονα κίνησης του, εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 , $V(t_0) = f'(t_0)$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

A) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathcal{R}$.

(Μονάδες 6)

B) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

Γ) α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\pi f(x) - 1 = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

(Μονάδες 3+4)

Δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τρία σημεία καμψής τα οποία είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x}, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$ και $g(x) = x \ln x$, $x > 0$.

A) Να βρείτε την παράμετρο α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

(Μονάδες 3)

Αν $\alpha = -1$, να αποδείξετε ότι :

B) α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

β. $g(x) \geq -\frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 4+4)

Γ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν έχουν κοινό σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του 1.

(Μονάδες 6)

Δ) α. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y = 0$.

β. Να δείξετε ότι $e^e \cdot x^x \geq e^{2x}$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

A. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

B. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 6)

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1,$$

έχει ακριβώς 2 ρίζες ως προς x , μια στο διάστημα $(0,1)$ και μια στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 7)

Επιμέλεια : Μαριτίνα Πιστικίδη, Ηλίας Σπυρόπουλος

Καλή Επιτυχία!