

Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου



Θέμα Α

A 1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη σ' αυτό.

β) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε: $[f(x_0)]' = f'(x_0)$.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

ε) Αν $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

μονάδες 5x2

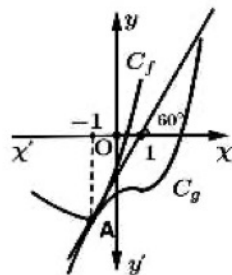
A 2. Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και η κοινή τους εφαπτομένη ε , στο σημείο A , με τετμημένη $x_0 = -1$. Να βρείτε:

α) Τα $f'(-1)$ και $g'(-1)$ μονάδες 4

β) Την εξίσωση της ε . μονάδες 3

γ) Τα $f(-1)$ και $g(-1)$ μονάδες 3

δ) Τα $(f \cdot g)'(-1)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)$. μονάδες 5



Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

B 1. Να βρείτε τη παράγωγο της f στο $x_0 = 0$.

μονάδες 4

B 2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

μονάδες 2

B 3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

μονάδες 5

B 4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f, f^{-1} .

μονάδες 4

B 5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων με την f .

μονάδες 2

B 6. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sin 2x}{f(x) + x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - 1|}{x^2 - 2x + 1}$

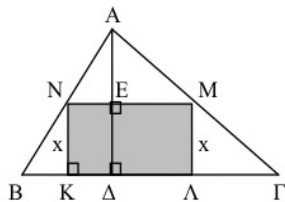
μονάδες 2+3+3

Θέμα Γ

Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $BΓ = 10$ cm και ύψους $AD = 5$ cm.

Γ 1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E και η περίμετρος P του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνονται από τους τύπους $E(x) = 10x - 2x^2$ και $P(x) = 20 - 2x$, $0 < x < 5$.

μονάδες 6



Γ 2. Έστω ότι το ύψος x του ορθογωνίου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες τα μέτρα του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού και της περιμέτρου να είναι ίσα.

μονάδες 7

Γ 3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + P(x) = E(x) + 11$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

μονάδες 7

Γ 4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε $E'(\xi)(2E(\xi) - 5) = 2\xi - 5$.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x + 1$.

Δ 1. Να βρείτε ακέραιο α τέτοιο, ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \alpha + 1)$.

μονάδες 3

Δ 2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 4

Δ 3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f^5(x) + 2f(x) = 36$

μονάδες 5

Δ 4. Να υπολογίσετε τα όρια: **α)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \eta\mu f(x))$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + f(x)\eta\mu f(x)}{f(x) + \sigma\upsilon\nu f(x)}$.

μονάδες 3+3

Δ 5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $g^2(x) + x^2 = 2xg(x) + \sqrt{f(x) + x^2 - x^5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(-2) = -3$ και $g(0) = -1$.

α) Να δείξετε ότι $g(x) = x - \sqrt{|x+1|}$

μονάδες 4

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

μονάδες 3