

Επαναληπτικό διαγώνισμα στην Άλγεβρα

Εισηγητής: Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Τριγωνομετρία - πολυώνυμα.

Φεβρουάριος 2021

Θέμα Α

A.1 Δίνεται η πολωνυμική εξίσωση

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \nu \in \mathbb{N}$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε να δείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Μονάδες 8

A.2 Πότε δύο πολυώνυμα είναι ίσα;

Μονάδες 3

A.3 Σχεδιάστε πρόχειρα στο διάστημα $[0, 4\pi]$ τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -\eta\mu x$ και $f(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$.

Μονάδες 4

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν ένα μη μηδενικό πολυώνυμο P έχει βαθμό ν τότε το πολυώνυμο P^2 έχει βαθμό 2ν .
2. Για κάθε γωνία θ ισχύει ότι $\eta\mu^4\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta = 1$.
3. Αν ένα πολυώνυμο n -οστού βαθμού έχει παραπάνω από n ρίζες, τότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει την ίδια περίοδο με την συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

5. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων ισούται με το μέγιστο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 2\alpha x^3 - 7x^2 + \beta x + 12$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x + 3)$$

είναι 60 δείξτε ότι:

B.1 $\alpha = -1$ και $\beta = 8$.

Μονάδες 8

B.2 Για $\alpha = -1$ και $\beta = 8$,

Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 8

B.3 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του πολυωνύμου P είναι πάνω από τον άξονα x' .

Μονάδες 9

Θέμα Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 6x^3 - \alpha x^2 - \beta x + 1$ για το οποίο το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 2$ είναι $6P(1) + 9$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 1$ είναι $P(2) - 44$.

Γ.1 Δείξτε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.

Μονάδες 8

Γ.2 Γράψτε τη ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : 3x^2 + x$.

Μονάδες 8

Γ.3 Δίνεται επιπλέον το πολυώνυμο $Q(x) = \alpha_{2\nu}x^{2\nu} + \alpha_{2\nu-1}x^{2\nu-1} + \dots + \alpha_1x + P(0)$ με $\alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1}, \dots, \alpha_1 \in \mathbb{Z}$. . Αν το Q έχει **δύο** ακέραιες ρίζες δείξτε ότι

$$\alpha_{2\nu-1} + \alpha_{2\nu-3} + \dots + \alpha_1 = 0.$$

Μονάδες 9**Θέμα Δ**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

Δ.1 Βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης του πολυωνύμου P με την ευθεία $y = -4$.

Μονάδες 6

Δ.2 Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = -9x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = P(x) - g(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} και λύστε την εξίσωση

$$2 \cdot \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)^3 = -12 \cdot \sqrt{x^2 + 4}.$$

Μονάδες 7

ii. Εξετάστε αν το πολυώνυμο $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $h(x)$.

Μονάδες 6

Δ.3 Να λύσετε την εξίσωση $h(\eta\mu x) = 0$ και να βρείτε ποιές από τις λύσεις της εξίσωσης είναι μεταξύ των αριθμών 2018π και 2021π.

Μονάδες 6

Να έχετε επιτυχία!