

Όνοματεπώνυμο: .....  
Μάθημα: .....  
Υλη: .....  
Επιμέλεια διαγωνίσματος: .....  
Αξιολόγηση : .....

### ΘΕΜΑ Α

**A1)** Πότε μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow R$  λέγεται συνάρτηση “1-1” ; (4 μονάδες )

**A2)** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο ;  
(4 μονάδες )

**A3)** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

“ Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθενα από τα διαστήματα  $\Delta_1$  και  $\Delta_2$  τότε είναι γνησίως φθίνουσα και στο  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  “

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (1 μονάδα )

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας . (3 μονάδες )

**A4)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή(Σ) ή Λάθος (Λ) :

α) Αν η συνάρτηση  $f: A \rightarrow R$  είναι “1-1” τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα  $xx'$  σε ένα μόνο σημείο.

**β)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-2,-3)$  και  $B(-1,4)$  τότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια και η συνάρτηση  $g$  περιττή τότε η συνάρτηση  $fog$  είναι περιττή.

**δ)** Αν για μια συνάρτηση  $f$  δεν ορίζεται η αντίστροφη της τότε η  $f$  δεν είναι γνησίως μονότονη.

**( 8 μονάδες )**

**A5)** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ :

α) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της **(2 μονάδες)**

β) Να δείξετε ότι και η αντίστροφη της είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. **(3 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$ ,  $x > -1$  και η σταθερή συνάρτηση  $h(x) = e - 1 + \ln 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα **( 6 μονάδες )**

**B2)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^x = 1 - \ln(x+1)$ , έχει ακριβώς μία λύση και να βρεθεί η λύση αυτής. **( 6 μονάδες )**

**B3)** Να βρεθούν τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_h$ . **( 6 μονάδες )**

**B4)** Να λυθεί η παρακάτω ανίσωση :

$$e^x - e^{2x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right) \geq 0 \quad (7 \text{ μονάδες})$$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$ , με  $x \geq 1$  και η συνάρτηση  $g$  για την οποία ισχύει  $g\left(\frac{e}{x}\right) = \ln x - 1$ ,  $x > 0$ .

**Γ1)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $g$ . (5 μονάδες)

Αν  $g(x) = -\ln x$  :

**Γ2)** Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f+g$  και  $\frac{f}{g}$ . (5 μονάδες)

**Γ3)** Να ορίσετε την συνάρτηση  $f \circ g$ . (5 μονάδες)

**Γ4)** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  αντιστρέφονται, να βρείτε την αντίστροφη τους και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των  $f, f^{-1}$  και  $g, g^{-1}$  σε ξεχωριστούς άξονες συντεταγμένων. (10 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha \cdot x + \beta}{x - \alpha}$ , με  $\beta \neq -\alpha^2$ .

**Δ1)** Να αποδείξετε ότι  $f(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \neq \alpha$ . (6 μονάδες)

Έστω ότι  $\alpha=3$  και  $\beta=5$ .

**Δ2)** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $f$  είναι “1-1” και να λύσετε την παρακάτω εξίσωση :

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - x\right) = \frac{65}{17} \quad (7 \text{ μονάδες})$$

**Δ3)** Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ . Τι παρατηρείται; **(5 μονάδες)**

**Δ4)** Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{3 \cdot f(e^x) + 5}{f(e^x) - 3} + \frac{3 \cdot f(x) + 5}{f(x) - 3} - 1 = 0 \quad (7 \text{ μονάδες})$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ : ASKISIOROLIS**

