

Όνοματεπώνυμο:

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ**

Ύλη: **ΑΝΑΛΥΣΗ**

Επιμέλεια διαγωνίσματος:

Αξιολόγηση :

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

(Μονάδες 10)

A2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε τι ορίζουμε ως σύνθεση της g με την f και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της ;

(Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση :

1. Μια γνήσια μονότονη συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της .
2. Αν μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in f(A)$.
3. Αν $f(0) > f(20)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα .
4. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ τότε η σύνθεση της f με την g ορίζεται στο σύνολο $\{x \in A \mid x \in B\}$.
5. Οι συναρτήσεις $f(x) = 2 \ln x$ και $g(x) = \ln x^2$ είναι ίσες .

(Μονάδες 2×5)

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

ii) Να εξετάσετε αν ορίζεται η $f \circ f$ και να βρεθεί ο τύπος της.

iii) Να εξεταστεί αν η f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 2+3+4)

B2. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $f(x-1) = x^2$. Να βρείτε τον τύπο $f(x)$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 3)

B3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 9}{x^3} & , 0 < x < 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} & , x > 2 \end{cases}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$

(Μονάδες 2+3+4+4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(x) = e^{x-5}$ και $g(x) = \ln x + 5$.

Γ1. Βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και εξετάστε αν είναι ίσες.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 6)

Γ3. Να ορίσετε την συνάρτηση $(f + g)(x)$ και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

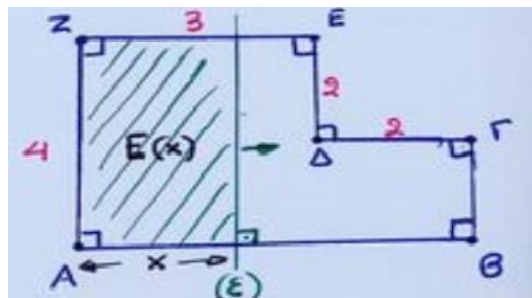
(Μονάδες 6)

Γ4. Να δείξετε ότι $(f + g)(e^x) < \frac{(f + g)(e^{2x}) + (f + g)(e^{3x})}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Η ευθεία (ε) κινείται προς τα δεξιά κάθετα προς το ευθύγραμμο τμήμα AB σχηματίζοντας αριστερά της το σκιαγραφημένο χωρίο εμβαδού $E(x)$ με $x \in [0, 5]$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι $E(x) = \begin{cases} 4x & , x \in [0, 3] \\ 2x + 6 & , x \in (3, 5] \end{cases}$.

(Μονάδες 6)

Δ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} E(x)$ και να σχεδιάσετε την συνάρτηση $E(x)$.

(Μονάδες 5)

Δ3. α) Για κάθε x_1, x_2 με $x_1 \leq 3 < x_2$, να αποδείξετε ότι $E(x_1) < E(x_2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $0 \leq E(x) \leq 16$.

(Μονάδες 4+4)

Δ4. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{E(x) - E(3)}{x - 3} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{E(3+h) - E(3)}{h} = 2$.

(Μονάδες 6)

ΚΑΛΗ ΣΑΣ ΔΙΑΣΚΕΛΑΣΗ!!