

Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Διδάσκων :
Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Σεπτέμβριος 2020

Θέμα Α

A.1 Έστω $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 στο \mathbf{A} . Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 9

A.2 Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα σύνολα \mathbf{A}, \mathbf{B} αντίστοιχα τότε τι ορίζουμε ως σύνθεση της g με την f και ποιό είναι το πεδίο ορισμού της;

Μονάδες 3

A.3 Πότε δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο σύνολο \mathbf{A} ;

Μονάδες 3

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Κάθε γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη.
2. Αν $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbf{A}$.
3. Αν η $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο \mathbf{A} δεν είναι ούτε 1-1 στο \mathbf{A} .

4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και ισχύει $f(0) > f(1)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
5. Σε κάθε 1-1 συνάρτηση ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

για κάθε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με

- $f(x) = e^{x-5}$
- $g(x) = \ln x + 5$

B.1 Βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g, g \circ f$ και εξετάστε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

B.2 Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 6

B.3 Να ορίσετε την συνάρτηση $(f + g)(x)$ και δείξτε ότι είναι γνήσια άυξουσα.

Μονάδες 6

B.4 Δείξτε ότι:

$$(f + g)(e^x) < \frac{(f + g)(e^{2x}) + (f + g)(e^{3x})}{2},$$

για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(2) = 3$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(f(x)) - f(x) = 2x - 2.$$

Γ.1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την τιμή $f(1)$.

Μονάδες 9

Γ.2 Δείξτε ότι $f(x) = x - 2 + 2f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ.3 Λύστε την εξίσωση $f(x) = 2$.

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) = 2x + e^{3x-21} - 15, x \in \mathbb{R}$
- $2g(x) + (e^{g(x)-7})^3 = 2016(x - 7) + 15, x \in \mathbb{R}$

Δ.1 Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

Δ.2 Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{3x-21} = -2x + 2031$ και να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

Δ.3 Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνήσια μονότονη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

Δ.4 Αν $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, δείξτε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την g^{-1} .

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!