

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 8**A2.**

A) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 1

B) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 2

Γ) Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι είναι σταθερή στο A ».

A) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα A , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

B) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α .

Μονάδες 1+3=4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

A) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα.

B) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

Γ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .

Δ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$, παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (α,β)$ τότε $f(α) \neq f(β)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 < f(x) < x^2 + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 6x_0$

Μονάδες 4

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (3,4)$, τέτοιο ώστε $2 < f'(\xi) < 12$

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{\eta \mu x}} \right]$

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1, x \geq 0$.

Γ1. Να βρεθεί η f' .

Μονάδες 2

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθεί το σημείο $M(x_0, f(x_0)), x_0 > 0$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα x' στο σημείο Α, τον άξονα y' στο σημείο Β, έτσι ώστε το Α να είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρεθεί, αν ορίζεται η $\varphi = f \circ f$.

Μονάδες 5

Γ5. Να εξετάσετε αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A με τεταγμένη 9 και τον άξονα $x'x$ στα σημεία B και Γ με τεταγμένες -2 και 3 αντίστοιχα. Επιπλέον, η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(5)x^5 + f(8)x^4 - x + 1}{f(2)x^4 - x + 1}$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f(x + 1) = 3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0, 2]$.

Μονάδες 7

Δ5. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και ισχύει $(f(x) - 9)f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) < f(x + 1) - f(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ