

Τελικό διαγώνισμα στην Άλγεβρα

Διδάσκων: Αντώνης Λουτράρης

Μάιος 2020

Θέμα Α

A.1 Έστω $\alpha > 1$. Γράψτε τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$.

Μονάδες 4

A.2 Να διατυπώσετε το θεώρημα ακέραιων ριζών.

Μονάδες 3

A.3 Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ δια του $x - \rho$ είναι ίσο με τη τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$.

Μονάδες 7

A.4 Σχεδιάστε πρόχειρα την γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$f(x) = \ln x, g(x) = e^{|x|}, h(x) = \eta\mu x, \phi(x) = \sigma\upsilon\nu x.$$

Τις συναρτήσεις h, ϕ σχεδιάστε τις στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Μονάδες 4

A.5 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ μπορεί να δώσει υπόλοιπο, ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού.
2. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1, x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} αν και μόνο αν $0 < \alpha < 1$.

3. Για κάθε $\theta > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει $\alpha^{\log_\alpha(\theta)} = \log_\alpha(\alpha^\theta)$.
4. Οι λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\phi(x) = \epsilon\phi(\theta)$ με $x, \theta \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι οι $x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$.
5. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7**Θέμα Β**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 8$.

B.1 Να επαληθεύσετε ότι ο αριθμός -1 είναι ρίζα του $P(x)$.

Μονάδες 6

B.2 Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : x - 1$.

Μονάδες 6

B.3 Να βρείτε τις άλλες ρίζες του $P(x)$.

Μονάδες 6

B.4 Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

Μονάδες 7**Θέμα Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^x$.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

Γ.2 Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{e} = f(1) - f(0)$.

Μονάδες 8

Γ.3 Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi(x) + f(0) = 0$ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 12**Θέμα Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με

- $f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
- $g(x) = f(\eta\mu x)$

Δ.1 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g .

Μονάδες 6

Δ.2 Λύστε την εξίσωση $g(x) = \ln 3$.

Μονάδες 6

Δ.3 Βρείτε τα διαστήματα όπου η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = \ln 7$.

Μονάδες 6

Δ.4 Να λύσετε την εξίσωση

$$e^{f(x)} = \frac{x}{2(x^2 - 1)} + \frac{1}{x + 1}.$$

Μονάδες 7

Καλή Διασκέδαση!