

Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Εισηγητής: Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Διαφορικός Λογισμός.

Μάρτιος 2020

Θέμα Α

A.1 Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ;

Μονάδες 3

A.2 Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

1. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Μονάδες 2

2. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και μάλιστα

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Μονάδες 6

A.3 Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

A.4 Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις την ασύμπτωτή της στο $+\infty$.

Συνάρτηση	Ασύμπτωτη
1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	A. $y=2$
2. $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$	B. $y=x-1$
3. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$	Γ. $y=-x+1$
	Δ. $y=x$
	Ε. $y=-x$

Μονάδες 4

A.5 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγος μίας συνάρτησης μηδενίζεται είναι θέσεις κρίσιμων σημείων.
2. Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στην C_f , για να διαγράψει τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά την θετική φορά.
3. Αν η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f τότε είτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ είτε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda + \frac{e^x}{e^x + 1}$ με το $\lambda \in \mathbb{R}$.

B.1 Αν η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ δείξτε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 4

B.2 Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

B.3 Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

B.4 Βρείτε τις ασύμπτωτες και σχεδιάστε πρόχειρα την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$
- $|e^{x^2} f(x) - e^{y^2} f(y)| \leq (x - y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Γ.1 Δείξτε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ.2 Δείξτε, με χρήση της ανισότητας $e^x \geq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ ότι

$$1 - x^2 \leq f(x) \leq 1, x \in [0, 1]$$

και ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x) + x^2}{x - \frac{1}{2}} - \frac{f(x) - 1}{x - \frac{1}{3}} = 1$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Γ.3 Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 5

Γ.4 Να λύσετε στο $(0, +\infty)$ την ανίσωση:

$$f\left(\sqrt{2}xe^{x^2-\frac{1}{2}}+1\right) > f\left(2e^{x^2-\frac{1}{2}}\right).$$

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Ας είναι μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) + f(-x) = f(x) \cdot f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 1$
- $f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ.1 Δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και κυρτή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 4

Δ.2

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή και ότι

$$f(x) \geq 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ii. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{f(x) \cdot f(y)}.$$

Μονάδες 5

Δ.3 Βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Δ.4 Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1) \cdot \ln |f(x) - 2|}{x \cdot (f'(2 \ln f(x)) - f'(x + \ln 4))}.$$

Μονάδες 5

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Να έχετε επιτυχία!