Ονοματεπώνυμο:………………………………………………………………

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ύλη : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ΛΟΥΤΡΑΡΗΣ- ΔΕΔΕΛΕΤΑΚΗΣ – ΠΙΣΤΙΚΙΔΗ - ΠΑΠΑΔΑΚΗ

Αξιολόγηση : ………………………………………………………………

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού .

(Μονάδες 6)

Α2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ; Πότε η ευθεία $y = y_0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 5)

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε είναι συνεχής και στα σημεία α και β .

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής .

(Μονάδες 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α) .

(Μονάδες 3)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεων σας **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση :

α) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}-1$, $x\geq 0$ και $g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, $x\geq 0$ είναι ίσες στο διάστημα $[0,+\infty)$.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε θα ισχύει $f(\beta)>0$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη , τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle .

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\left[xf(x)\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta xf'(x)dx \quad .$$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f^2(x)}=-\infty$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\ln 2}$ και $f(e)=\frac{1}{e}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x)\neq 0$ για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $f'(x)=-(\ln x+1)\cdot f^2(x)$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

B1. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

(Μονάδες 8)

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

(Μονάδες 5)

B3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

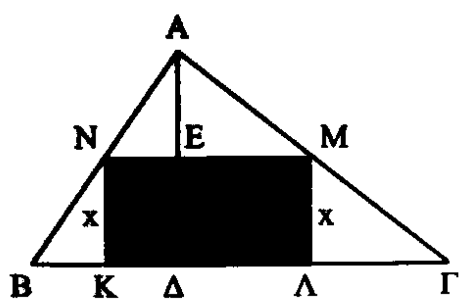
(Μονάδες 5)

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Ένα ορθογώνιο $\mathrm{K\Lambda MN}$ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ βάσης $\mathrm{B\Gamma}=10$ cm και ύψους $\mathrm{A\Delta}=5$ cm όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



Γ1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E και η περίμετρος Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνονται από τους τύπους $\mathrm{E}(x)=10x-2x^2$ και $\Pi(x)=20-2x$, $0<x<5$.

(Μονάδες 7)

Γ2. Έστω ότι το ύψος x του ορθογωνίου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό . Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου για τις οποίες τα μέτρα του ρυθμού μεταβολής του εμβαδού και της περιμέτρου είναι ίσα .

(Μονάδες 6)

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+\Pi(x)=\mathrm{E}(x)+11$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{E}'(\xi)\left(2\mathrm{E}(\xi)-5\right)=2\xi-5$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}+1 & , \ x\in[-1,0)\\ e^x\sigma\upsilon\nu x & , \ x\in[0,\pi]\end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της .

(Μονάδες 5)

Δ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της .

(Μονάδες 6)

Δ3. Να λύσετε στο διάστημα $[0,\pi]$ την εξίσωση $4e^{-\frac{\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{\pi}{4}}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)^2=2\sqrt{2}$

(Μονάδες 7)

Δ4. Αν $\mathrm{E}(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=-1$ και $x=\pi$, να δείξετε ότι $\mathrm{E}(\Omega)>e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{e^{\pi}}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΚΑΛΗ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ!!!!