

Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Διδάσκοντες: Ελπίδα Παπαδάκη - Μαριτίνα Πιστικίδη
Γιώργος Δεδελετάκης - Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Μάρτιος 2019

Θέμα Α

A.1 Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε δείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 8

A.2 Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 3

A.3 Σε ένα γραπτό διαγώνισμα παραγώγων ο καθηγητής Μαθηματικών ζήτησε να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, 0 < \alpha \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ότι ισχύει $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha, x \in \mathbb{R}$.

Σε ένα γραπτό ένας μαθητής έκανε την ακόλουθη απόδειξη:

Έχουμε ότι $f(x) = \alpha^x \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln \alpha^x \Leftrightarrow \ln f(x) = x \ln \alpha$. Παραγωγίζουμε και παίρνουμε

$$(\ln f(x))' = (x \ln \alpha)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \alpha \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \ln \alpha \Leftrightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha.$$

Συμφωνείτε με τον μαθητή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή και δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
2. Αν για μία συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε η γραφική της παράσταση δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = 2019$.
3. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγος μίας συνάρτησης μηδενίζεται είναι θέσεις ακροτάτων.
4. Αν η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f τότε είτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ είτε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.
5. Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στην C_f , για να διαγράψει τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά την θετική φορά.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$.

B.1 Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B.2 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 6

B.3 Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

B.4 Να σχεδιάσετε πρόχειρα την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 4]$ με σύνολο τιμών το $[-2, 5]$. Επιπλέον για την f ισχύει ότι:

- $f(1) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) \ln(x-3)}{(x-4)^2} = 2$
- η f' είναι κυρτή στο $[1, 4]$.

Γ.1 Δείξτε ότι $f(4) = 0$.

Μονάδες 4

Γ.2 Δείξτε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (1, 4)$ τέτοια ώστε $f'(\kappa) = f'(\lambda) = 0$.

Μονάδες 6

Γ.3 Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο καμπής της C_f στο $(1, 4)$.

Μονάδες 5

Γ.4 Να δειχθεί ότι υπάρχει σημείο $A((x_0), f(x_0))$ με $x_0 \in (1, 4)$ ώστε:

- i. η κλίση της C_f στο A να ισούται με τη τιμή της f στο x_0 .

Μονάδες 5

- ii. $f''(4) > \frac{2 - f(x_0)}{4 - x_0}$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Ας είναι μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) + f(-x) = f(x) \cdot f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 1$

Δ.1 Δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και κυρτή στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

Δ.2

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή και ότι

$$f(x) \geq 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

2. Αν $a_1, a_2, \dots, a_\nu \in (0, +\infty)$ με $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_\nu = 1$ δείξτε ότι

$$f(\ln a_1) \cdot f(\ln a_2) \cdot \dots \cdot f(\ln a_\nu) \geq 2^\nu, \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Μονάδες 3

Δ.3 Δείξτε ότι $f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Δ.4 Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1) \cdot \ln |f(x) - 2|}{x \cdot (f'(2 \ln f(x)) - f'(x + \ln 4))}.$$

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!