# Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Διδάσκοντες : Μαριτίνα Πιστικίδη - Γιώτα Κωτσοπούλου
Ελπίδα Παπαδάκη - Γιώργος Δεδελετάκης - Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Νοέμβριος 2018

**Θέμα Α**

**Α.1** Έστω μία συνάρτηση $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό $\eta$ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

**Μονάδες 7**

**Α.2** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

$\ll$ Για οποιοδήποτε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ το $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = 0.$ $\gg$

α΄. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 1**

β΄. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

**Μονάδες 3**

**Α.3** Έστω $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ συνεχής και γνήσια φθίνουσα για την οποία $f(1) \cdot f(3) < 0$. Για ποια από τις παρακάτω προτάσεις **δεν** μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ;

i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της $f$ στο διάστημα $(1,3)$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$.

iii. $f([1,3]) = [f(3), f(1)]$.

iv. Η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(3,4)$.

v. Η εξίσωση $f(x) = 2019$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $[0,4]$.

**Μονάδες 4**

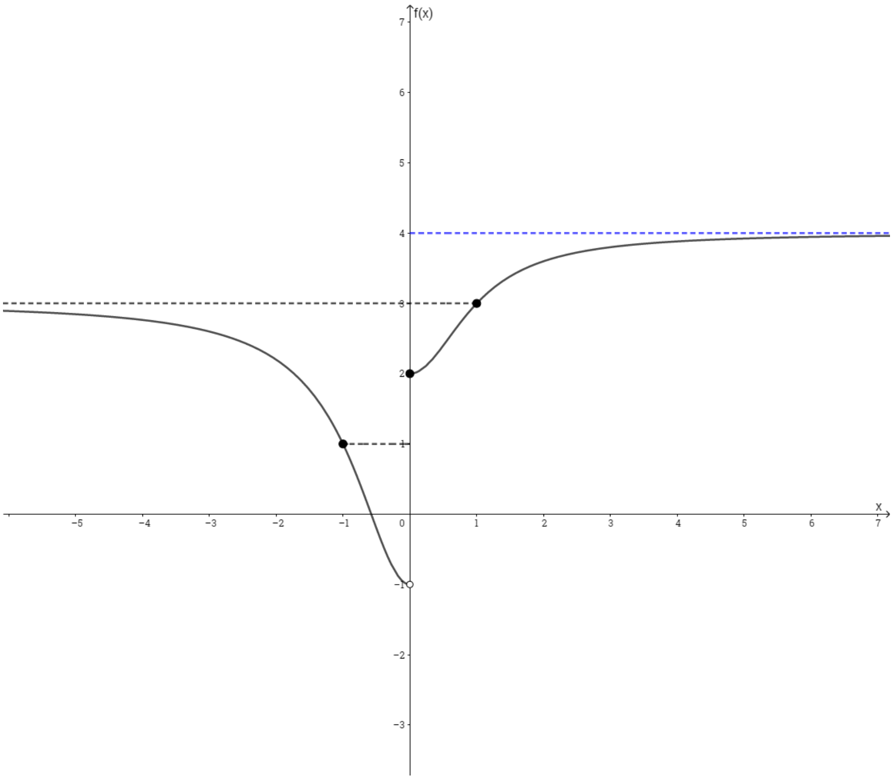
**Α.4** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.
2. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ και η $f$ ορίζεται στο $x_0$ τότε $f(x_0) > 0$.
3. Ισχύει ότι $\eta\mu x \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
4. Για κάθε συνεχή και γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής διασφαλίζει την ύπαρξη ακριβώς μίας, μέγιστης και ελάχιστης τιμής στο $[0,1]$.
5. Ισχύει οτι $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$.

**Μονάδες 10**

**Θέμα Β**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφικη παράσταση μίας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.




**B.1** Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f$.

**Μονάδες 5**

**B.2** Υπολογίστε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ii. $\lim\limits_{x\to -\infty} [(f(x)-3)\cdot \sigma\upsilon\nu x]$.

iii. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{f(x)}}{f(x)-4}$.

iv. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left[(f(x)+1)\cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{|x|}\right)\right]$.

**Μονάδες 8**

**B.3** Εξετάστε αν ισχύει το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής στο διάστημα $[0, 1]$. Ικανοποιεί η $f$ το **συμπέρασμα** του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1, 1]$;

**Μονάδες 6**

**B.4** Δείξτε οτι υπάρχει ακριβώς ενα $x_0 \in [0, 1]$ με την ιδιότητα:

$$4f(x_0) = f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1).$$

**Μονάδες 6**

**Θέμα Γ**

Ας είναι μια συνεχής συνάρτηση $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - 2f(x)\ln x = 1 - x - (\ln x)^2, x \in (0, 1]$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f\left(\frac{1}{e}\right) + 1\right) \cdot x^3 + 5x - 2019\right] = +\infty.$

**Γ.1** Δείξτε οτι $f(x) = \ln x - \sqrt{1 - x}, x \in (0, 1]$.

**Μονάδες 6**

**Γ.2** Αποδείξτε οτι η $f$ αντιστρέφεται και βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$.

**Μονάδες 4**

**Γ.3** Βρείτε την μικρότερη τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση

$$\ln x - \sqrt{1 - x} = 1 - \lambda + e^{2-\lambda}$$

να έχει λύση στο διάστημα $(0, 1]$.

**Μονάδες 7**

**Γ.4** Βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) \cdot e^x$ και στη συνέχεια λύστε την εξίσωση

$$f^{-1}(x) + \sigma\upsilon\nu x = 2.$$

**Μονάδες 8**

**Θέμα Δ**

Ας είναι μία συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει

$$f(x) - \frac{1}{f(x)} = 2x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Δ.1** Βρείτε τους δυνατούς τύπους της $f$.

**Μονάδες 7**

**Δ.2** Δίνεται επιπλέον οτι $f(0) = \lim_{x \to +\infty} \left[ x - \sqrt{x^2+1} - x^6 \cdot \eta\mu \left( \frac{1}{x^6} \right) \right]$.
Δείξτε οτι $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.

**Μονάδες 6**

**Δ.3** Θεωρούμε κάποιον αριθμό $\epsilon$ με $0 < \epsilon < 1$. Δείξτε οτι η εξίσωση

$$\frac{f(\epsilon)}{x} - \frac{f^2(\epsilon)}{x-1} = \frac{\eta\mu(\pi\epsilon)}{x-2}$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες, ως προς $x$, στο διάστημα $(0, 2)$.

**Μονάδες 6**

**Δ.4** Αν $\epsilon$ ο αριθμός του προηγούμενου ερωτήματος, υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[ (e^{e^{f(\epsilon)}-1})^x \cdot \eta\mu \left( \frac{1}{f(x)} \right) + \frac{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x}{(1+\epsilon)^x} \right].$$

**Μονάδες 6**

**Τα θέματα του διαγωνίσματος τελειώνουν εδώ. Για όποιον θελήσει να ασχοληθεί προαιρετικά ας απαντήσει στο παρακάτω ερώτημα και θα εκτιμηθεί σημαντικά στη βαθμολόγηση του γραπτού του.**

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία $f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0$ σε κάθε σημείο $x$ όπου $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$. Βρείτε τις ρίζες της $f$.

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

## Καλή Διασκέδαση!