Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά προσανατολισμού

Διδάσκων :
Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Ανάλυση.

Αύγουστος 2018

Θέμα Α

Α.1 Έστω $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1 στο **Α**. Δείξτε οτι οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Μονάδες 7

Α.2 Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
$\ll$ Κάθε συνάρτηση f που είναι $1-1$ σε ένα διάστημα **Α** είναι και γνήσια μονότονη στο **Α**. $\gg$

α΄. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β΄. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

Μονάδες 3

Α.3 Σχεδιάστε, εντελώς πρόχειρα, το γράφημα μίας συνάρτησης

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

- να είναι 1-1 στα διαστήματα $[0, 4)$ και $(6, +\infty)$.
- $f(4) = 0$ και $f(6) = 2014$
- $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (4, 6)$.
- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1, \ \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = 2017$

Μονάδες 4

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$.
2. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.
3. Μια συνάρτηση f είναι $1{-}1$ αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντίστοιχα και
$$f(A) \cap B \neq \emptyset.$$
Τότε ορίζεται πάντα η σύνθεση gof.
5. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 στο $\mathbb{R}^*$ και $f(-2018) < f(2018)$ τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -\ln x, x > 0$ και $g(x) = \dfrac{x}{1+x}, x > -1$.

Β.1 Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

Μονάδες 5

Β.2 Αν $h(x) = (fog)(x) = -\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right), x > 0$ να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}.

Μονάδες 7

Β.3 Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}, x > 0$ δείξτε ότι η ϕ είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και ότι η εξίσωση $\phi(x) = \alpha$ είναι αδύνατη για κάθε $\alpha < 0$.

Μονάδες 6

Β.4 Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\phi(e^x)} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\phi(1-x)} > 0$$

στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

- $\eta\mu\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+x^2}{x} - 2\right) + 2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+x^2}{x}$
- $|x \cdot g(x) - \eta\mu^2 x| \le \eta\mu^4 x, x \in \mathbb{R}$

Γ.1 Δείξτε οτι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+x^2}{x} = 2$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Μονάδες 8

Γ.2 Δείξτε οτι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1$ και υπολογίστε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(\eta\mu x)}{x^2 + x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\eta\mu x) + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x}$

Μονάδες 12

Γ.3 Αν επιπλέον θεωρήσουμε την συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = x \cdot g(x) - \eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R}$$

δείξτε οτι $|h(x)| \le x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2}.$$

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f\left([0, +\infty)\right) = (0, +\infty)$ και η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $h(0) = 0$ για τις οποίες ισχύουν

- $\ln f(x) = h^3(x) + h(x) + 1$ για κάθε $x \geq 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{h(x)}{x} = 1$

Δ.1 Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και οτι

$$f(x) + f(x^2) > f(x^3) + f(x^4)$$

για κάθε $x \in (0, 1)$.

Μονάδες 7

Δ.2 Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) + f(x^2) = f(x^3) + f(x^4)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1]$.

Μονάδες 5

Δ.3 Δείξτε ότι

$$f(e^x) \geq f\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right), x \geq 0$$

και λύστε στο $[0, +\infty)$ την εξίσωση

$$f(e^x) + h(\sqrt{x}) = f\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right).$$

Μονάδες 7

Δ.4 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\eta\mu\sqrt{x \cdot \sqrt{h(x)}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}}}.$$

Μονάδες 6

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!