Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά κατεύθυνσης

Διδάσκοντες :
Νέλλη Σπυριδάκη - Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Συνέχεια συνάρτησης.

Νοέμβριος 2017

Θέμα Α

Α.1 Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α.2 Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε

(α΄) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β).

(β΄) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β).

(γ΄) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β).

(δ΄) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β).

Μονάδες 5

Α.3 Πότε λέμε οτι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 3

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Μία συνάρτηση f λέγεται γνήσια φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) > f(x_2)$.
2. Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $N(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.
3. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_\alpha x}{\alpha^x} = -\infty$.
4. Άν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$.
5. Αν η συνάρτηση $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbf{A}$ τότε
$$\lim_{h \to 0} \Big(f(x_0 + h) - f(x_0) \Big) = 0.$$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\eta\mu x}{x} & , x \in [-1, 0) \\ 0 & , x = 0 \\ \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} & , x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Β.1 Δείξτε οτι η f είναι συνεχής.

Μονάδες 5

B.2 Δείξτε οτι εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[-1, 3\pi]$.

Μονάδες 6

B.3 Έστω ρ η θετική ρίζα της f στο διάστημα $[-1, 3\pi]$. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to\rho} f\left(-\frac{1}{f(x)}\right).$$

Μονάδες 7

B.4 Έστω $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Αν επιπλέον γνωρίζετε οτι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[0, 1]$ τότε δείξτε οτι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, 2\alpha)$ με την ιδιότητα

$$2f(\xi) = f(\alpha) + f(2\alpha).$$

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = \ln(e^x - 1)$.

Γ.1 Βρείτε το πεδίο ορισμού της fog.

Μονάδες 4

Γ.2 Δείξτε οτι η fog είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 5

Γ.3 Αποδείξτε οτι οι συναρτήσεις fog και f έχουν το ίδιο σύνολο τιμών.

Μονάδες 5

Γ.4 Δείξτε οτι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{2016}{f(x_0)}.$$

Μονάδες 6

Γ.5 Δείξτε οτι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ με την ιδιότητα:

$$2016f(\xi) = f\left(\frac{1}{2015}\right) + 2014f(x_0) + f\left(\frac{1}{2016}\right).$$

Προφανώς, το x_0 του ερωτήματος είναι το x_0 του ερωτήματος **Γ.4**.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Ας είναι η συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία

- $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x, x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$

Δίνεται επιπλέον οτι $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

Δ.1 Δείξτε οτι $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ.2 Βρείτε το σύνολο τιμών της f και δείξτε οτι η εξίσωση

$$2f(x) - 2017 = 0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ.3 Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\left(\sigma\upsilon\nu f^2(x) - 1\right) \cdot \ln|f(x)|\right].$$

Μονάδες 6

Δ.4 Δείξτε οτι η εξίσωση

$$\frac{f(3)\left(f^2(x) - f^2(2x)\right)}{x-3} + \frac{f(4)\left(f(x^2) - f(x^3)\right)}{x-4} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(3, 4)$.

Μονάδες 7

Τα θέματα του διαγωνίσματος τελειώνουν εδώ. Για όποιον θελήσει να ασχοληθεί προαιρετικά ας απαντήσει στο παρακάτω ερώτημα και θα εκτιμηθεί σημαντικά στη βαθμολόγηση του γραπτού του.

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία $f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0$ σε κάθε σημείο x όπου $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$. Βρείτε τις ρίζες της f.

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!