

Επαναληπτικό διαγώνισμα στην Άλγεβρα

Διδάσκων :

Αντώνης Λουτράρης

Θεματική Ενότητα: Πολυώνυμα - Τριγωνομετρία.

Φεβρουάριος 2015

Θέμα Α

A.1 Δίνεται η πολυωνυμική εξίσωση

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \nu \in \mathbb{N}$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος ρ είναι ρίζα της εξίσωσης τότε να δείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Μονάδες 7

A.2 Πότε δύο πολυώνυμα είναι ίσα ;

Μονάδες 3

A.3 Δείξτε ότι αν $\sigma\nu(\alpha + \beta) \neq 0, \sigma\nu\alpha \cdot \sigma\nu\beta \neq 0$ τότε

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$$

Μονάδες 5

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Είναι $\sigma\nu\nu^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$

2. Για κάθε γωνία θ ισχύει ότι $\eta\mu^4\theta + \sigma\nu\nu^4\theta = 1$.

3. Αν ένα πολυώνυμο n -οστού βαθμού έχει παραπάνω από n ρίζες, τότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.
5. Ο βαθμός του γινομένου δύο μή μηδενικών πολυωνύμων ισούται με το μέγιστο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 2\alpha x^3 - 7x^2 + \beta x + 12$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 3)$ είναι 60 δείξτε ότι:

B.1 $\alpha = -1$ και $\beta = 8$.

Μονάδες 6

B.2 Για $\alpha = -1$ και $\beta = 8$,

- i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$ και να γράψετε τη ταυτότητα της διαίρεσης.

Μονάδες 4

- ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης του $P(x)$ με τους άξονες.

Μονάδες 5

- iii. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον x' .

Μονάδες 5

B.3 Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x + \frac{6}{P(0)} = 1 - \frac{P(-1)}{P(-3)}$.

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 12x + \beta$ το οποίο έχει ρίζα το 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 1$ είναι 1.

Γ.1 Αφού δείξετε ότι $\alpha = 9$ και $\beta = -4$ βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης του πολυωνύμου P με την ευθεία $y = -4$.

Μονάδες 8

Γ.2 Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = -9x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$.

i. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = P(x) - g(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 4

ii. Βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της h είναι κάτω από τον x' .

Μονάδες 5

Γ.3 Να λύσετε την εξίσωση $h(\eta\mu x) = 0$ και να βρείτε ποιές από τις λύσεις της εξίσωσης είναι μεταξύ των αριθμών 2015π και 2017π .

Μονάδες 8**Θέμα Δ**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x + 1$.

Δ.1 Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 8

Δ.2 Γράψτε τη ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : 2x + 1$.

Μονάδες 8

Δ.3 Να λύσετε την εξίσωση

$$\epsilon\phi x - \epsilon\phi 2x = \eta\mu x.$$

Μονάδες 9

Ανταλλάσσω όλο το διαγώνισμα με το παρακάτω θέμα αξίας 100 μονάδων:

Δίνεται μία πολυώνυμική συνάρτηση f με $f(0) = 5$ και ακέραιους συντελεστές. Δείξτε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y = x$ το πολύ σε τέσσερα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες. Ποια είναι τα σημεία αυτά;

Καλή Επιτυχία!