

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ Λυκείου Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Επιμέλεια : Σπυριδάκη Αθηνά Μαρία - Φαρσάρης Γιώργος

19 Μαρτίου 2016

Θέμα Α

A.1 Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε να δείξετε ότι είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

A.2 Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[α, β]$;

Μονάδες 5

A.3 Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Μονάδες 3

A.4 Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 3

A.5 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

2. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο A και $f''(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του A , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το A .
4. Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = -\infty$.
6. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και η f παίρνει δύο τιμές, τότε παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες.

Μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- B.1** Αν $f(-1) = 2$ είναι τοπικό ακρότατο της f , να βρείτε τις τιμές των α, β .

Μονάδες 10

Για $\alpha = 4$ και $\beta = -1$

- B.2** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

- B.3** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Μονάδες 8

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:

- $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.
- $f''(x) = e^x + f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x$.

Μονάδες 6

Γ.2 Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

Γ.3 Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 5

Γ.4 Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε

$$f''(\xi_1) + f''(\xi_2) = 3e^2 - 1.$$

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $e^{2x} \cdot f'(x) = e^{x+f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $f(0) = -\ln 2$.
- $g(x) = g(1) \cdot x^2 - g(0) \cdot x + \frac{6}{5} \cdot \int_0^1 g(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.
- Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(1, g(1))$ είναι η ευθεία

$$(\varepsilon) : y = 2x - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Δ.1 Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Στη συνέχεια , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (1 + e^x)e^{f(x)+e^x} dx$.

Μονάδες 3

Δ.2 Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Μονάδες 5

Στη συνέχεια , να αποδείξετε ότι $g(x) = 2(x^2 - x + 1), x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 3

Δ.3 Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < \frac{5}{3}$.

Μονάδες 4

Δ.4 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f', g' και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 0$.

Μονάδες 6

Καλή Επιτυχία !