

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Θεματική Ενότητα: Διανύσματα - Ευθεία

Επιμέλεια : Σπυριδάκη Αθηνά - Μαρία

Ιανουάριος 2016

Θέμα Α

A.1 Να αποδείξετε την ισοδυναμία $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Μονάδες 7

A.2 Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$;

Μονάδες 4

A.3 Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Μονάδες 6

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

Μονάδες 10

1. Ισχύει πάντα ότι $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

2. Ισχύει ότι $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$.

3. Αν θ είναι η γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και

$$\vec{\beta} = (x_2, y_2), \text{ τότε } \cos \theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

4. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα τότε $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.
5. Αν $|\vec{AB}| = x_B - x_A$, τότε $\vec{AB} // x'x$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και διάνυσμα $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 5 \text{ και } \vec{\beta} \cdot (3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 10$$

- B.1** Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -2$ και $|\vec{\beta}| = 4$.

Μονάδες 6

- B.2** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{u} ,
αν $\vec{v} = (5\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{u} = (\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$.

Μονάδες 7

- B.3** Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων \vec{v} και \vec{u} είναι οξεία.

Μονάδες 5

- B.4** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει
 $|x\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με εξισώσεις διαγωνίων $A\Gamma : x - y + 4 = 0$
και $B\Delta : y = 5x - 4$. Αν ισχύει ότι $\vec{B\Gamma} = (2, -2)$

- Γ.1** Να δείξετε ότι το κέντρο K του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(2, 6)$

Μονάδες 5

Γ.2 Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το Γ , είναι κάθετη στη $B\Delta$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 10.

Μονάδες 5

Γ.3 Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και A .

Μονάδες 5

Γ.4 Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ .

Μονάδες 5

Γ.5 Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το Δ και είναι παράλληλη στην $ΑΓ$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 2, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ και το διάνυσμα \vec{x} , για το οποίο ισχύει $\vec{x} // (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{x} - \vec{\beta})$.

Δ.1 Να αποδείξετε ότι $\vec{x} = -\frac{1}{6}(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$.

Μονάδες 6

Δ.2 Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων \vec{x} και $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 5

Δ.3 Να βρείτε το διάνυσμα \vec{v} , ώστε να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{2\pi}{3}$ και να έχει μέτρο τριπλάσιο του \vec{x} .

Μονάδες 5

Δ.4 Να βρείτε τη τιμή του λ , ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να είναι κάθετο στο $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$.

Μονάδες 4

Δ.5 Να βρείτε την τιμή του μ , ώστε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}$.

Μονάδες 5

Καλή Επιτυχία !