

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

A) Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

ισχύει ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

B) i) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

(Μονάδες 4)

ii) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A ; Πότε η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια και ποια η γεωμετρική ιδιότητα της γραφικής της παράστασης;

(Μονάδες 6)

Γ) Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις

i) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3$

ii) Μια συνάρτηση f είναι 1-1 αν και μόνο αν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη

iii) Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με

$$x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

iv) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και $0 \in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο Δ .

v) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = \ell$ τότε $\ell > 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ2

α) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x \cdot g(x) + 1 \leq \sin x$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ell$, να δείξετε ότι $\ell = 0$

(Μονάδες 8)

γ) Αν f, g οι συναρτήσεις των ερωτημάτων α και β αντίστοιχα να βρείτε το

όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) + \eta\mu 3x}{\epsilon\varphi x + x \cdot g(x)}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ3

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x + 4$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

(Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 6)

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^{x^2+4x}) < 3$

(Μονάδες 6)

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) \cdot \eta\mu(x^2 - 3x + 2)}{x - 1}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f^3(x) + 5f(x) - e^x + 1 = 0$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

(Μονάδες 6)

iii) Να βρείτε τη συνάρτηση g για την οποία ισχύει :

$$f(g(\ln x) - 2) = f(x + \ln x - 3), \text{ για κάθε } x > 0$$

(Μονάδες 6)

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(2^x) + f(3^x) = f(e^x) + f(\pi^x)$

(Μονάδες 7)

POKERO