Διαγώνισμα στην Άλγεβρα

Διδάσκων: Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Μη γραμμικά συστήματα-συναρτήσεις τριγωνομετρία .

Νοέμβριος 2016

Θέμα Α

Α.1 Δείξτε οτι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει ότι

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$

Μονάδες 6

Α.2 Έστω $f : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Πότε η f:

1. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{A}$;
2. είναι περιττή στο $\mathbf{A}$;
3. παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 \in \mathbf{A}$;

Μονάδες 6

Α.3 Θεωρείστε οποιαδήποτε γωνία ω. Εξηγήστε την ανισότητα

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1.$$

Μονάδες 3

Α.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Αν $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ τότε οι αριθμοί $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$ είναι ομόσημοι.

2. Αν για κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει οτι $f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε παρουσιάζει σε κάποιο σημείο μέγιστο.
3. Μία άρτια συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
4. Αν για κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, το $f(3) < f(1)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
5. Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi^2\omega + \sigma\phi^2\omega = 1$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι παραστάσεις:

- $\mathbf{A} = \dfrac{\epsilon\phi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\phi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)}$
- $\mathbf{B} = \dfrac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \dfrac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$

Β.1 Δείξτε οτι $\mathbf{A} = -1$.

Μονάδες 6

Β.2 Δείξτε οτι $\mathbf{B} = \dfrac{2}{\eta\mu x}$.

Μονάδες 6

Β.3 Αν $\mathbf{B} = \dfrac{10}{4}$ και $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ βρείτε την τιμή των παραστάσεων

i. $\mathbf{\Gamma} = 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x - \epsilon\phi x$.

ii. $\mathbf{\Delta} = \dfrac{\eta\mu 2016}{1 + \sigma\upsilon\nu 2016} + \dfrac{\eta\mu 2016}{1 - \sigma\upsilon\nu 2016}$

Μονάδες 13

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$.

Γ.1 Βρείτε το πεδίο ορισμού της f και δείξτε οτι η f γράφεται στη μορφή

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Μονάδες 5

Γ.2 Δείξτε οτι η f είναι άρτια.

Μονάδες 6

Γ.3 Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία στο $(0, +\infty)$ και έπειτα λύστε την εξίσωση

$$2 + \frac{1}{(x^2+2|x|+1)^2} = \frac{9}{4}$$

Μονάδες 8

Γ.4 Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $h(x) = f(x) + x^2, x > 0$.
Θεωρείστε γνωστό ότι για κάθε $x > 0, x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \alpha x^3 + \beta x$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(0) + f^2(7) - 10f(0) - 6f(7) \leq -34$
- $\dfrac{3}{g(1)} - \dfrac{24}{g(2)} = -1$
- $\dfrac{3g(2)+4g(1)}{g(1)g(2)} = \dfrac{4}{3}$

Δ.1 Δείξτε οτι $f(0) = 5, f(7) = 3$ και $g(1) = 3, g(2) = 12$.

Μονάδες 8

Δ.2 Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και δείξτε ότι η g είναι περιττή.

Μονάδες 6

Δ.3 Μελετήστε την g ως προς την μονοτονία και δείξτε ότι η $g-f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ.4 Λύστε την ανίσωση :

$$f\left(f(x^2+6x)-3\right) < 5.$$

Μονάδες 5

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία !