# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Διδάσκων :
Αντώνης Λουτράρης
Θεματική Ενότητα: Μιγαδικοί Αριθμοί-Όρια Συναρτήσεων.

Νοέμβριος 2011

**Θέμα Α**

**Α.1** Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

**Μονάδες 9**

**Α.2** Άν $f, g$ δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α,Β αντίστοιχα, τότε τι ορίζουμε ώς σύνθεση της $f$ με τη $g$ και ποιό είναι το πεδίο ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**Α.3** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 3**

**Α.4** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

α.Άν $z \in \mathbb{C}$ τότε $z^2 = z \cdot \overline{z}$.
β.Άν $f(x) < 0$ κοντά στο $x_0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$.
γ.Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f^{-1}$ και $f$

βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$.
δ.Άν $\lim_{x\to x_{0}+} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x\to x_{0}+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
ε.Άν η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει $f(0) > f(1)$ τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 10**

**Θέμα Β**

Δίνονται οι μιγαδικοί $z$ με $\mid z + 3 - 4i \mid = 3$ (1).
**Β.1** Τι παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο η παραπάνω εξίσωση;

**Μονάδες 5**

**Β.2** Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου του $z$.

**Μονάδες 6**

**Β.3** Άν $\alpha, \beta$ δύο μιγαδικοί που επαληθεύουν την (1) και $\mid \alpha - \beta \mid = 6$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mid \alpha + \beta \mid$$

**Μονάδες 7**

**Β.4** Άν ο $w$ είναι μιγαδικός που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(3 + 4i)w + (3 - 4i)\overline{w} - 40 = 0,$$

να βρεθεί ή ελάχιστη τιμή του μέτρου $\mid z - w \mid$

**Μονάδες 6**

**Θέμα Γ**

**Γ.1** Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρεθεί το $f(0)$ και να δειχθεί ότι η $f$ αντιστρέφεται.
β. Εάν η $f$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να βρεθεί η αντίστροφή της.
γ. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$ και $\lim_{x\to 1} \frac{f^{-1}(x)+4}{x^2-1}$

**Μονάδες 15**

**Γ.2** Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta\mu^3 x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Άν $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$,τότε:
α.Να δείξετε ότι $\alpha = 1$
β.Να βρείτε τα όρια:

$i.\lim_{x\to 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$, $ii.\lim_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{x}$,$iii.\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}$

**Μονάδες 10**

**Θέμα Δ**

**Δ.1** Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες στο $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ώστε να ισχύουν:

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\eta\mu 2x - xg(x)}{\eta\mu x} = 1$ και $\lim_{x\to 0} \frac{xf(x)+g(x)\eta\mu x}{x} = 2.$

Να βρεθούν τα όρια:
$\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to 0} g(x)$

**Μονάδες 10**

**Δ.2** Άν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ισχύει:

$4x\sqrt{x^2+3} \leq (x-1)f(x) + 8x \leq 2x^2 + 6x, \forall x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν:

α.το Α=$\lim_{x\to 1} f(x)$

β.το Β=$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)f(x)+\sqrt{x}-1}{x^2-3x+2}$

γ. Άν $g(x) = e^{Ax-2B} + 1$, όπου Α,Β τα παραπάνω όρια, να μελετήσετε τη $g$ ώς πρός τη μονοτονία και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 15**

- Διαβάστε προσεχτικά τις εκφωνήσεις και προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείρηση χρόνου.
- Διάρκεια 3 ώρες.

## Καλή Διασκέδαση !